《第一次数学危机》

作者：张天蓉

大家都知道，一个国家或地区的经济会发生“经济危机”，没想到数学这种象牙塔中的理论研究也会发生危机。本文从数学史上的第一次危机（共三次危机）出发，理解危机对科学发展的促进作用。

第一次数学危机发生于古希腊时代。古希腊的泰勒斯（Thales，公元前 624 年－公元前 546 年）被学界誉为第一位数学家，他第一次将“证明”的思想引入几何，证明了“泰勒斯定理”，为数学注入了理性精神。

古希腊的思想家们追溯万物之源，思想活跃、不落俗套、敢于出新。各种灵巧怪异的想法纷纷涌现出来，听起来令人感觉妙趣横生。如泰勒斯认为“万物皆水”，他的一位学生主张“万物皆气”，另一位学生认为万物起源于某种虚无缥缈不定形的东西……

离泰勒斯活跃的米利都不远处，有一个叫萨摩斯岛的城邦，则出了一位主张“万物皆数”的数学家，认为“数”可以解释世界上的一切事物。这是毕达哥拉斯（Pythagoras，前 570 年－前 495 年）。

1，毕达哥拉斯其人

他既是数学家，也是哲学家和音乐理论家。他对数字痴迷到近乎崇拜；同时认为一切真理都可以用比例、平方及直角三角形去反映和证实。他的毕达哥拉斯学派除了将数学推崇到极致之外，还具有一些不可思议的神秘主义因素。

例如，他们认为吃蚕豆是不道德的，因为人死之后，灵魂会寄存在蚕豆中，据说毕达哥拉斯本人可以与牲畜交谈，以便告诉牲畜不要吃蚕豆。

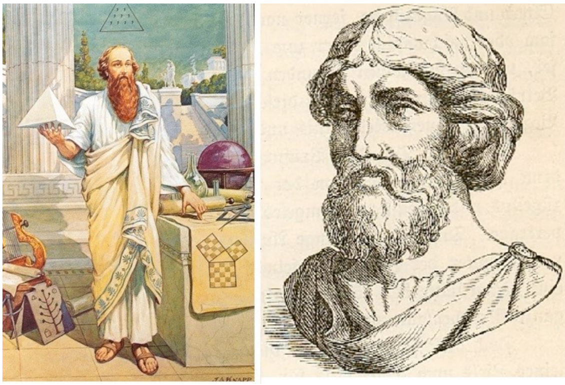

图 1：毕达哥拉斯

毕达哥拉斯与泰勒斯相差 50 多年，曾经见过泰勒斯并受他以及米利都学派的影响，可以算是泰勒斯的学生。

毕达哥拉斯曾用数学研究乐律，首次发现了音调的音程按弦长比例产生，频率间隔比例的简单数值形成了美妙和谐的声音。由此，毕达哥拉斯将自己有关数的理论结合米利都学派的宇宙论，提出了宇宙无比“和谐”的概念。他用数学关系表达音调的特质，他认为这些关系也呈现在视觉、角度、形状中……所有的比例都是按照完美的数字构成的！太阳、月亮和行星都散发着自己独特的嗡嗡声（轨道共振），地球上生命的特性反映了人耳察觉不到的这些天体的声音。

毕达哥拉斯第一次提出了大地是球体这一概念，从他开始，希腊哲学产生了数学的传统，对以后古希腊的哲学家有重大影响。

2，毕氏学派对数学的贡献

毕氏学派证明了毕达哥拉斯定理（勾股定理），这和其他很多文明中发现许多勾股数的意义是不同的。

勾股数是符合勾股定理的三元数组，它们的数目有无穷多。例如，(3,4,5), (5,12,13), (8,15,17), (7,24,25)…等等，都是勾股数，中国古代的“勾三股四弦五”就是典型的例子。在公元前 18 世纪的巴比伦石板上，就已经记录了各种勾股数组，最大的是（18541，12709，13500）。

发现了勾股数，不等于发现了勾股定理，更不等于证明了勾股定理。这个定理的证明，是始于毕达哥拉斯，再由后来的欧几里得给出了清晰完整的证明。

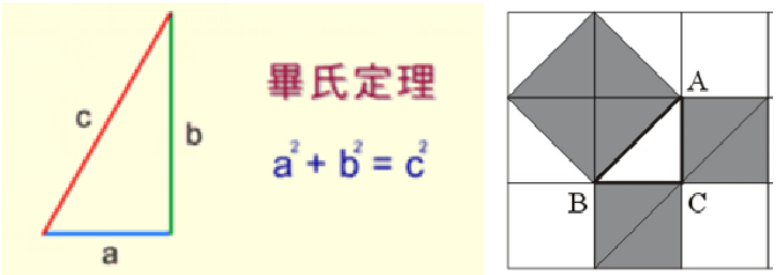

图 2：毕达哥拉斯定理

毕达哥拉斯学派还研究过正五边形和正十边形的作图，得到黄金分割的比值数：（1：0.618）。

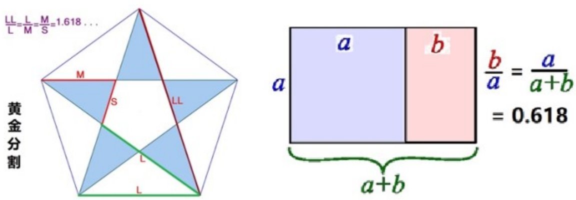

图 3：黄金分割

除了诸如证明勾股定理这种具体的贡献之外，毕氏学派当时最著名的数学思想是用原子论的观点，将几何建于算术（整数）之上。根据毕达哥拉斯学派的观点，一切数都可以用整数以及整数的比值（即我们现在所说的“有理数”）表示出来。

当年的古希腊，各种哲学思想派别林立、此消彼长。毕达哥拉斯欣赏原子论的观点，并把它用于数学，用原子观点来构建他的几何纲领。

原子论认为万物分下去是原子，而毕氏学派认为几何线段分下去是“点”。点是什么呢？就是几何的原子，和原子一样有大小，即其长度不为零 。例如，设 d 表示点的长度，d 有三种可能性：d = 0, d = 无穷小，d>0。

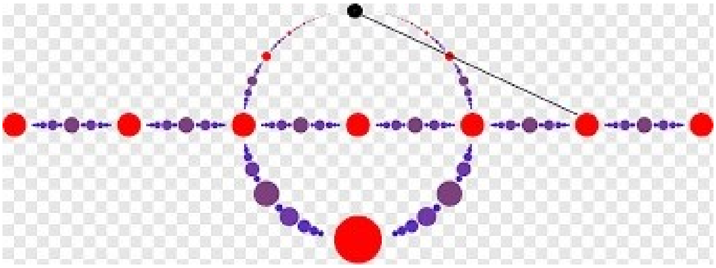

图 4：毕氏学派用原子论观点解释几何线段

对“点”的理解反映了当时数学界连续派和离散派观点的区别，根据连续派的说法，线段无限可分，最后的“点”无尺寸，大小为零，或有人说是“无穷小”。但毕氏学派认为：如果说点是 0，那么，无尺寸的“点”，如何能构成有尺寸的线段呢？这是无中生有、自相矛盾的。如果说点是无穷小，那么无穷小是什么？也说不清楚，令人困惑，更显得诡秘深奥。因此，毕氏学派采取离散派的观点，认为“分割”有尽头，最后的“点”很小但不为零。换言之，在毕氏学派看来，线段就像是许多珠子串在一起的珍珠项链。基于毕氏的几何观，任何两个线段都可以共度（或称公度、通约），因为它们都由某个最小的长度组成。也就是说，所有的数都可以表示为整数或者整数之比。因此，世界及宇宙的美妙与和谐就建立在整数的基础之上！

3，希帕索斯发现无理数

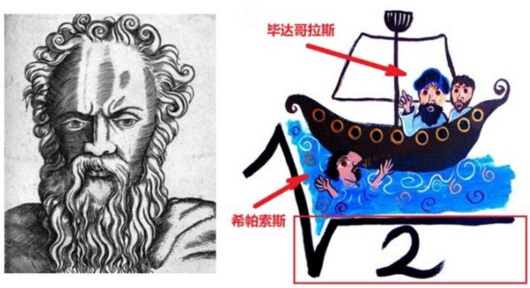

图 5：发现无理数的希帕索斯

谁知好景不长，毕达哥拉斯的一位学生希帕索斯发现了 √2 这种无法用整数或整数之比来表示的数（之后被称为“无理数”）。

事实上，从毕氏学派证明了的勾股定理，是很容易发现无理数的。一个边长为 1 的正方形，其对角线便不能与边长通约，长度记为√2。类似情形还有很多很多：面积等于 3、5、6、……17 的正方形的边，与单位正方形的边也都不可通约。无理数的存在逐渐成为并不罕见人所共知的事实。√2 与 1 不可通约，可以用如下反证法证明：

设 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，m、n互质，没有公因子

两边平方化简 得 $m^2=2n^2$

⇨ m 是偶数，

设m=2s，s是正整数

那么$2n^2=4s^2$，⇨ $n^2=2s^2$

n也一定要是偶数，

m、n都是偶数。所以 m、n 有公因子2

和假设m、n互质相矛盾

所以假设不成立

无理数的发现，对于依靠整数的毕氏哲学，是一次致命的打击。因此，据说当时他们将这些事实严格保密，缄口不言，不想被不识时务的希帕索斯给捅了出来！唉，别无他法，只有将他丢到海中喂鱼，才能解除一点同窗学子们的心头怨恨。

不过是发现了一种不能通约的数而已，有这么严重吗？情况的确挺严重的，因为：如果存在不可通约的线段，就没有公共的量度单位，便不能将“点”看成有长度的东西，毕氏学派“万物皆（整）数”的哲学思想立刻分崩离析，建立于美妙的整数之上的和谐宇宙也轰然倒塌了！毕氏学派证明的几何命题、他们关于相似形的一般理论，都局限在可通约的量上。人们自然便怀疑：数学作为一门精确的科学是否还有可能？宇宙的和谐性是否还存在？

因此，无理数的发现，引起了第一次数学危机。

4，芝诺悖论冲击极限概念

没过多久，生活在另一个古希腊城邦埃利亚的芝诺（Zeno of Elea，公元前490-430），又提出了几个怪怪的、似乎扯不清楚的“悖论”，更加深了人们的危机感，以及对美好和谐世界的担忧。

图 6：芝诺

芝诺是著名哲学家巴门尼德的学生，因提出四个有关运动的悖论而知名。其中的阿基里斯悖论与数学中极限理论密切相关，在此重点介绍一下。

阿基里斯是古希腊神话的善跑英雄，希腊第一勇士，假设他跑步的速度为乌龟的十倍：例如，阿基里斯 10 米/秒，乌龟 1 米/秒。出发时，乌龟在前面 100 米处，如图 7 所示。

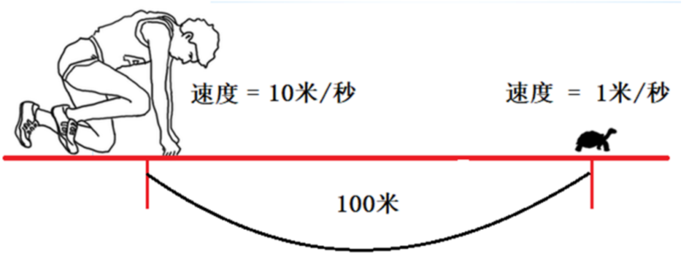

图 7：**阿基里斯追乌龟**

按照常识，阿基里斯很快就能追上并超过乌龟。

芝诺却说：“他永远都赶不上乌龟！”

为什么？芝诺振振有词：开始，乌龟超前 100 米；当他跑了 100 米到乌龟开始位置时，乌龟已经向前爬了 10 米，乌龟超前 10 米。然后下一步，乌龟将超前 1 米；再下一步，超前 0.1 米；然后继续下去：超前 0.01 米、0.001 米、0.0001 米……不管这个数值变得多么小，乌龟永远超前！

用我们现代的数学知识，一个简单的代数计算就足以反驳芝诺的“谬论”。

假设某个时刻 x 秒之后，阿基里斯追上了乌龟（图 8），可以列出 x 满足的方程并解出 x=(100/9)。也就是说，11 又 1/9 秒之后，阿基里斯赶上了乌龟！

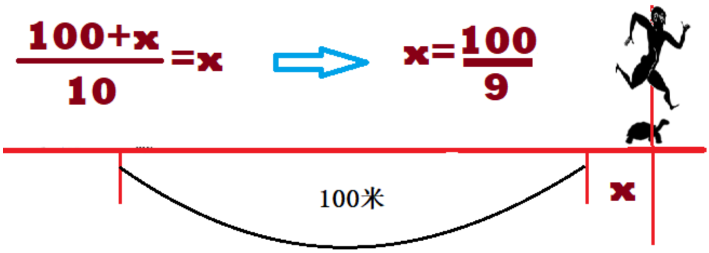

图 8：阿基里斯悖论的解答

因此，现在的大多数人会觉得芝诺是在“诡辩”，因为他说的乌龟超前的一连串数字：1 米、0.1 米、0.01 米、0.001 米、……，貌似无穷多，但都是在（100/9）秒之内完成的，并非“永远”！

当我们说到“无限”， 有两种含义： 一是无限分割， 一是无限延伸。无限份时间不等于无限长时间！一个收敛级数的和是有限的。而时间的流逝却是无限的。芝诺显然混淆了两者，或者偷换了概念。因此，以现代观点看，他的确是在“狡辩”。

不过，我们需要用历史的眼光分析这个问题。那是两千多年前，还没有完善的极限概念，可能也不知道“收敛级数”这个词，但芝诺悖论中的数据正好是一个收敛级数，而这也正是我们得到上面结论的基础。比芝诺稍后（200 年左右）的阿基米德（前 287 年一前 212 年）对此悖论进行了颇为详细的研究。他把每次追赶的路程相加起来，计算阿基里斯和乌龟到底跑了多远，将这问题归结为无穷级数求和的问题，证明了尽管路程可以无限分割，但整个追赶过程是在一个有限的长度中（因为收敛）。如果设想用一个不收敛的序列（例如，调和级数）来重新思考阿基里斯追龟的问题，情况就有所不同了。所以说，芝诺的说法并非仅仅是狡辩。

5，芝诺悖论的意义

芝诺（约公元前490-430）　　庄子（約前369年—前286年）

图 9：极限思想的萌芽

“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，这句话是中国惠施（前 370 年-前 310 年）说的。意思是说，一尺长的竿，每天截取一半，一万年也截不完。竿子越来越短，长度越来越趋于零，但又永远不会等于零，这正是“事物无限可分，但又不可穷尽”的极限思想的萌芽。

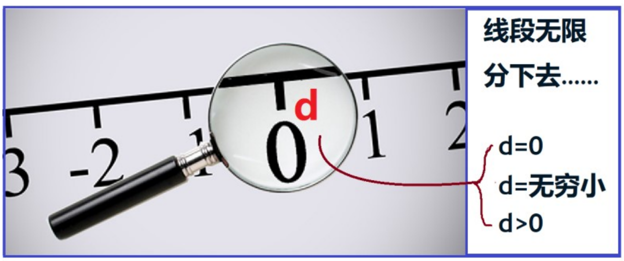

图 10：不同的极限观点

前面说到的毕氏学派用原子论解释几何的数学观，代表了古希腊极限观。

芝诺时代已经过去二千四百多年了，但是围绕芝诺的争论还没有休止。芝诺揭示了稠密性和连续性、无限可分和有限长度、连续和离散、实无穷和潜无穷之间的关系。引起人们对这些关系的关注与研究。

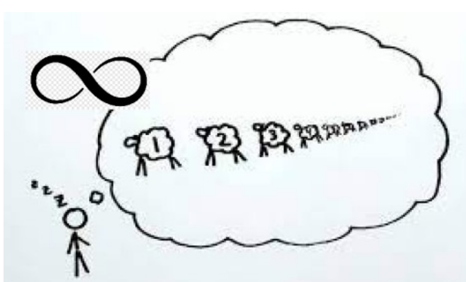

图 11：实无穷和潜无穷

实无穷把极限当作数学实体，潜无穷认为极限是无限趋近的过程。古时候，毕氏学派代表“实无穷”的极限观，惠施的说法是“潜无穷”观点。

因此，在希腊数学发展的关键时刻，芝诺也做出了有意义的贡献。

6，第一次数学危机的解决

第一次数学危机被柏拉图（Plato，公元前 429 年一前 347 年）的弟子欧多克索斯（Eudoxus of Cnidus，公元前 408 年一前 355 年）创立了新的比例论、完善了穷竭法而克服。

欧多克索斯也属于毕氏学派，是毕达哥拉斯弟子阿尔库塔斯（Archytas，前 428 年一前 347 年）的学生。因此，第一次数学危机的解决可说是“解铃还需系铃人”。也可以说，无理数的发现，当年是毕氏学派的最大灾难，其实也是毕氏学派的最大成就。

欧多克索斯处理不可通约量的方法，出现在欧几里得（前 325 年一前 265 年）《几何原本》第 5 卷中，和狄德金于 1872 年绘出的无理数的现代解释基本一致。他给出的比例的定义与所涉及的量是否有公度无关，这样就容许了无理数的存在。

7，从历史发展的视角理解科学危机

第一次数学危机使整数的尊崇地位受到挑战，使古希腊的数学基础发生了根本性的变化。在第一次数学危机之前，古希腊的数学是以数为基础的。第一次数学危机之后，古希腊的数学基础则转向几何，以几何为基础，几何学开始在希腊数学中占具特殊地位使，使数学的公理化成为可能。

危机的解决也推动了数学及其相关学科的发展。同时，第一次数学危机也表明了直觉和经验不一定可靠，推理证明才是可信的。从此希腊人开始建立几何学公理体系，直到后来的欧几里得。因此，公理化思想是数学思想上的一次革命，是第一次数学危机的自然产物。

由此产生的欧几里得几何对数理天文学的发展有重大意义。由于宇宙是几何的，宇宙的规律是几何规律，因此研究宇宙就离不开几何图形以及几何理论。

回顾一下历史事实便知，数学基础从整数转向几何意义颇大。古代以数为基础的文明，很难建立数学的公理系统。古代中国和古印度古埃及都是例子。在这些国家从未建立起数学的公理系统。

因此，第一次数学危机，是整个科学发展进程中的一个重要事件，对科学的发展起了促进作用。