从为什么不能除以零谈起

宁中

 本文涉及的两个问题都与除法有关。很可能每个人都曾经思考过，但是未必都能够找到相对满意的答案。因为极少看到有人仔细解释这些问题，利用这个机会写出来。也算是抛砖引玉吧。

一、为什么零不能作为除数？

零不可以作为除数是每一个小学生都知道的事实。但是为什么不可以，就不是每个人都能够说清楚的了。最常见的解释是，被一个(整)数$n$除，相当于把被除的那个数分成$n$等分，得出的商就是每一份有多少。按照这样的理解，被零除相当于没有人分，这个时候去谈每个人分多少当然是没有意义的。

这个解释虽然不能说不对，但是并不能真正令人满意。问题在于它并没有说明为什么“不能”。而是拿实际上不可操作作为理由。而在数学上，其实是有一些貌似不合理，但是在数学上却是可行的例子的。比如我们定义阶乘的时候，把零的阶乘规定为1，就没有什么问题。零之所以不能当作除数的真正原因是那样会造成逻辑上的矛盾。

假定我们允许零作为除数，那么我们实际上也就承认其结果，或者说商，应该是一个数。比方说，如果$x=1/0$.那么这个$x$应该是什么数呢？既然我们允许零参与我们的算术“游戏”，它就应该遵守所有的规则。我们知道对于分数的算术运算，乘以分母的结果是得到分子。这样问题就来了，如果我们在上面的等式两边同时乘以0，因为任何数乘以0都等于0，左边为0.但是右边根据我们的规则，应该得到1.于是就出现了$1=0$ 这样的矛盾。不仅如此，类似地我们还可以得出$2=0$、$3=0$，或者任何其他的数，这样当然是不行的。

有人可能会说，好吧，这些数都不能除以0，但是也许0除以0是可以的呢！那我们就来看看这样会发生什么。

按照我们熟知的规则，一个数除以自己应该等于1.但是如果我们在$0/0=1$两边同时乘以一个非零的数，比如5，那么左边是5乘以分子0，得到的分子仍然是0，于是得出$0/0=1$，而右边5乘以1得到5.这样就会出现 $1=5$。这个结果显然也不是我们能够接受的。

这样看起来，把除以零的结果看成一个通常意义上的数是不行的。有没有可能把它看成别的什么，比如无穷大呢？

这不失为一个有趣的想法。问题是这样一来，我们首先就需要说清楚无穷大是什么，包括它们的大小比较、运算法则等等， 然后才能判断是否会因此产生新的矛盾。在古典分析学(即以传统的实数理论为基础的分析学例如微积分，实变函数论等，以区别于建立在数理逻辑基础上的所谓“非标准分析”)当中，无穷大和无穷小通常都是指一些特殊的变量。特别是无穷小作为变量其实并不就等于0，因此除以这样的无穷小通常并不会造成矛盾。其有关运算仍然是以普通的实数运算为基础的。虽然0作为一个特例也可以看成无穷小，但是除以0仍然会导致困难而不被允许。粗略地说，无穷小是指极限为0的变量，而无穷大则是指极限超过任何有限数的变量。这种说法当然是不严格的。但是如果需要严格讨论的话，首先就要说清楚极限是怎么回事，然后才能定义无穷大和无穷小。这些已经超过我们这篇短文的范围。有兴趣的读者可以参考任何一本分析学的入门读物。

二、为什么有理数一定可以写成循环小数

我们第一次接触有理数和无理数的概念，一般都是在小学高年级。那时候，有理数和无理数通常都是用小数来定义的。无理数就是无限不循环小数。而有理数自然就是有限小数或者无限循环小数。至于为什么，老师通常不会解释。可能有人以为，即使解释了，以小学生的认知水平恐怕也理解不了。对此，当然不是每个人都同意。下面我们就来看看是否可以只用到小学的数学知识就能解释。

不过在给出足够简单的解释之前，我们首先需要解决一个问题，就是有理数的表示。实际上，每个有理数都可以表示成无限循环小数。

也许不是每个人都同意。好，让我们来看看这是为什么。我们只需要什么一件事，就是有限小数也可以表示成无限循环小数。我们象来看一个例子，

$$1=0.999…$$

可能有人会说，右边明明是小于1的嘛！真是这样吗？

我们姑且把右边的数记成$x=0.999…$,然后两边同时乘以10.得到$10x=9.999…$,.但是右边可以写成$9+0.999…=9+x$,也就是$10x=9+x$.由此解方程，很容易得到$x=1$.

很奇怪吗？（或者是很奇妙？）大概各人感觉不尽相同吧！

还有另外一种解释。相信绝大多数人会接受$1/3=0.333…$，那么在两边同时乘以3会怎么样？还是1$=0.999…$,

类似地，对于任何一个有限小数，例如0.25，我们总是可以把它写成0.24999… 的形式。这个做法对于所有的有限小数同样有效。

接下来的问题，就是为什么有理数一定可以写成无限循环小数呢？

我们已经说明，对于有限小数，这总是可以做到的。也就是说，对于整数和分子能够被分母除尽的分数，我们的结论是正确的。这样一来，问题就归结到分子不能被分母除尽的情形。我们把这样的分数写成$m/n$的形式，而且假定这个分数是既约的，也就是分子分母的最大公因子为1.

当我们用竖式(也叫做“长除法”)做除法运算的时候，每一步都会得到一个余数。因为我们已经假定了不能除尽，所以无论如何这个余数都不能为0，而一旦余数小于分母，商的表达式当中，小数点后面的每一位数字都是把前面一次带余除法的余数后面加上一些0，直到加0以后的数字(不考虑小数点，也就是把它们看成整数)超过分母，然后再一次用分母去除这个数，由此得出商的下一位数字和新的余数。由此可以了解，这个分数的小数表示当中，小数点以后的每一位数字都是由前一次除法的余数决定的。相同的余数一定会得出相同的下一位数字。但是任何整数被一个非零整数除的余数只有有限种可能。因为我们已经假定$m$不能被$n$除尽，所以余数最多只能有$n-1$种情况。不难看出，这样的除法最多进行到小数点以后$n-1$步，余数就一定会重复。也就是说，商的小数表示的数字必然开始循环。

至于循环小数为什么是有理数，大家应该在高中学习几何级数的时候都应该有所了解。无非是因为其中的循环部分可以写成一个几何级数的和，而几何级数的求和公式给出的是一个用其首项和公比表示的一个分式，其结果自然是一个分数。

需要说明的是，虽然上面的讨论都是针对十进小数而言，但是基本的想法对于其它小数，比如二进小数或者三进小数同样成立。当然在细节上会需要一些改动。

进一步当然可以问一些问题，比如循环节的长度，也就是每一个循环的数字个数。这个问题相对复杂一些，需要用到数论当中的一些知识。记得北师大的傅种孙先生曾经写过一篇文章介绍这个问题。只是不知道是否能够从网上找到。原来是发表在《数学通报》上面的。不过这已经是很多年前的事情了。

【按：本文写作时参考了 Ian Stewart, *Professor Stewart’s Cabinet of Mathematical Curiosities*, Basic Books, New York, 2009】